zhaoqianwen2

作业三、四 赵倩文

1.

球状星团的半径 $R_{global}=1pc$，质量 $M_{global}=10^5 M_{sun}$，恒星数密度$n\sim 100pc^{-3}$;
椭圆星系的半径 $R_{elliptical}=3kpc$，质量 $M_{elliptical}=10^{11} M_{sun}$，恒星数密度$n\sim 0.1pc^{-3}$;
星系团 $R_{cluster}=0.1Mpc$，质量 $M_{cluster}=10^{14} M_{sun}$，恒星数密度$n\sim 10^{-4}pc^{-3}$;

1.1

假设球状星团、椭圆星系和星系团都是孤立且处于维里平衡状态的。
动能 $\kappa\epsilon=\frac{3M\sigma_r^2}{2}$; 势能 $p\epsilon=\frac{-3GM^2}{5R_e}$;
由位力定理得 $<\kappa\epsilon>+2<\kappa\epsilon>=0$ 得：$\sigma_r=\sqrt{\frac{GM}{5R_e}}$
1> 球状星团：$\sigma=\sqrt{\frac{GM_{global}}{5R_{global}}}=\sqrt{\frac{4.301\times 10^{-9}km^2 MpcM_{sun}^{-1}s^{-2}\times 10^5 M_{sun}}{5\times 1pc}}=9.28\ km/s$
2> 椭圆星系：$\sigma=\sqrt{\frac{GM_{elliptical}}{5R_{elliptical}}}=\sqrt{\frac{4.301\times 10^{-9}km^2 MpcM_{sun}^{-1}s^{-2}\times 10^{11} M_{sun}}{5\times 3kpc}}=169.33\ km/s$
2> 星系团：$\sigma=\sqrt{\frac{GM_{cluster}}{5R_{cluster}}}=\sqrt{\frac{4.301\times 10^{-9}km^2 MpcM_{sun}^{-1}s^{-2}\times 10^{14} M_{sun}}{5\times 0.1Mpc}}=927.47\ km/s$

1.2

定义 $\Lambda=\frac{b_{max}}{b_{min}}$，通常取 $b_{min}=r_s$（强交会半径），b_{max}取整个恒星系统的大小。
当势能的改变量至少像其初始动能那么大时，就说发生了一次强交会：$\frac{Gm^2}{r}\geq\frac{mV^2}{2}$;
定义 $r_s=\frac{2Gm}{V^2}$，则 $\Lambda=\frac{RV^2}{Gm}$;
弛豫时间是系统的两次平衡所经历的时间，单颗恒星受到系统中其他恒星的引力作用后，运动状态完全改变后需要的时间。
在时间t内，在瞄准距离 b 和 $b+\Delta b$ 之间经过 M 的所以恒星 m 的速度改变为 $<\Delta V_{\perp}^2>=\int_{b_{min}}^{b_{max}} n(Vt2\pi bdb)(\frac{2Gm}{bV})^2=\frac{8\pi G^2m^2nt}{V}ln(\frac{b_{max}}{b_{min}})$
将$<\Delta V_{\perp}^2>=V^2$代入，
得弛豫时间$t_{relax}=\frac{V^3}{8\pi G^2m^2nln\Lambda}$
强交会的平均时间$t_s=\frac{V^3}{4\pi Gm^2n}$，
得 $t_{relax}=\frac{t_s}{2ln\Lambda}=\frac{2\times 10^9yr}{ln\Lambda}(\frac{V}{10km/s})^3(\frac{m}{M_{sun}})^{-2}(\frac{n}{10^3pc^{-3}})^{-1}$

球状星团：$\Lambda=\frac{RV^2}{Gm}=\frac{1pc\times(9.28km/s)^2}{4.301\times 10^{-9}km^2MpcM_{sun}^{-1}s^{-2}\times 1M_{sun}}=20022.88$;

$t_{relax}=\frac{2\times 10^9yr}{ln(20022.88)}(\frac{9.28km/s}{10km/s})^3(\frac{1M_{sun}}{M_{sun}})^{-2}(\frac{100pc^{-3}}{10^3pc^{-3}})^{-1}=1.614\times 10^9yr.$

椭圆星系：$\Lambda=\frac{RV^2}{Gm}=\frac{3kpc\times(169.33km/s)^2}{4.301\times 10^{-9}km^2MpcM_{sun}^{-1}s^{-2}\times 10^{11}M_{sun}}=60068635.20$;

$t_{relax} = \frac{2\times10^9 yr}{ln()}(\frac{169.33km/s}{10km/s})^3(\frac{1M_{sun}}{M_{sun}})^{-2}(\frac{0.1pc^{-3}}{10^3 pc^{-3}})^{-1} = 5.42 \times 10^{15} yr.$

星系团：$\Lambda = \frac{RV^2}{Gm} = \frac{0.1Mpc\times(927.47km/s)^2}{4.301\times10^{-9} km^2 MpcM_{sun}^{-1} s^{-2}\times10^{14} M_{sun}} = 2 \times 10^{13};$

$t_{relax} = \frac{2\times10^9 yr}{ln(2\times10^{13})}(\frac{927.47km/s}{10km/s})^3(\frac{1M_{sun}}{M_{sun}})^{-2}(\frac{10^{-4} pc^{-3}}{10^3 pc^{-3}})^{-1} = 5.21 \times 10^{20} yr.$

1.3

穿越时间 $t_{cross} = \frac{R}{V}$

球状星团：$t_{cross} = \frac{1pc}{9.28km/s} = \frac{3.1\times10^{13} km}{9.28km/s} = 1.06 \times 10^5 yr$

椭圆星系：$t_{cross} = \frac{3kpc}{169.33km/s} = \frac{9.3\times10^{16} km}{9.28km/s} = 3.18 \times 10^8 yr$

星系团：$t_{cross} = \frac{0.3Mpc}{927.47km/s} = \frac{9.3\times10^{18} km}{9.28km/s} = 3.18 \times 10^{10} yr$

验算：球状星团$\frac{t_{relax}}{t_{cross}} \sim 10^4, \frac{N}{6ln(N/2)} = \frac{10^6}{6ln(5\times10^5)} \sim 10^4; \frac{t_{relax}}{t_{cross}} = \frac{N}{6ln(N/2)}$

2.

$V_c = 200km/s, M = 8.5 \times 10^{11} M_{sun}$
$E = -\frac{MVc^2}{2} = -1.7 \times 10^{16} M_{sun} km^2 s^{-2},$

因为$m_d \sim j_d$，所以$R_d = \frac{\lambda GM^{3/2}}{2V_c|E|^{1/2}}(\frac{j_d}{m_d}) = \frac{\lambda GM^{3/2}}{2V_c|E|^{1/2}}$

$\rightarrow \lambda = \frac{2V_c|E|^{1/2} R_d}{GM^{3/2}} = \frac{2\times200km/s\times(-1.7\times10^{16})^{1/2}\times3kpc}{4.301\times10^{-9} km^2 MpcM_{sun}^{-1} s^{-2}\times(8.5\times10^{11})^{3/2}} = 0.046$