天文成像的 WCS 模型简介

By 熊翊飞

WCS 是一套从相机的像素坐标转换到天球坐标的算法，Greisen & Calabretta 所写的三篇文章[1] 中对此有着详细的描述,本文将对该模型最核心的算法做一个介绍。

在介绍从像素坐标到天球坐标的转换之前，先介绍一个简单的例子。如下图所示，对于平面直角坐标系的某一个点来说，它在这两个不同的坐标下有不同的分量表示，而这两种表示可以通过一个旋转矩阵来转换，这个矩阵的列向量实际上分别是绿色坐标系的两个基向量在蓝色坐标系下的表示。对于绿色坐标系下的任意点、其在蓝色坐标系下都有一个对应的坐标，然而我们不可能将其一一罗列下来，好在有这个转换矩阵在，我们只需要记住这个矩阵中的参数 θ 就行。而对于 WCS 模型来说，我们需要 8 个参数来限制这个转换关系。

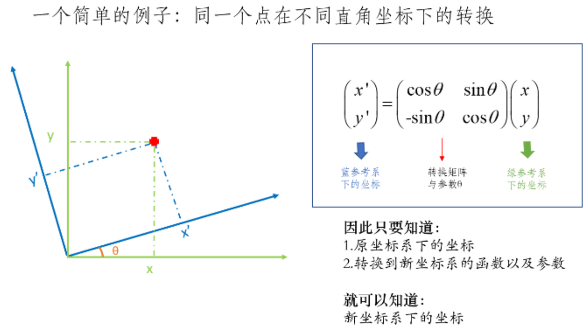

图 1 同一个点在不同直角坐标下的转换

如下图所示是 CCD 成像时的一个侧视图，假设一个小孔成像模型，右侧红色的平面是 CCD 的像素平面，蓝色的是不同方向入射的平行光，因而会在 CCD 平面上成像不同方向的天体，为了方便处理，我们可以把 CCD 平面投影到天球的切平面上，这样问题首先可以转换为两个平面坐标之间的变换。这个投影平面就叫做“世界坐标系”，World Coordinates System，简称 WCS,这个叫法其实并不是天文学独有的，而是源自计算机视觉领域对相机成像的建模。

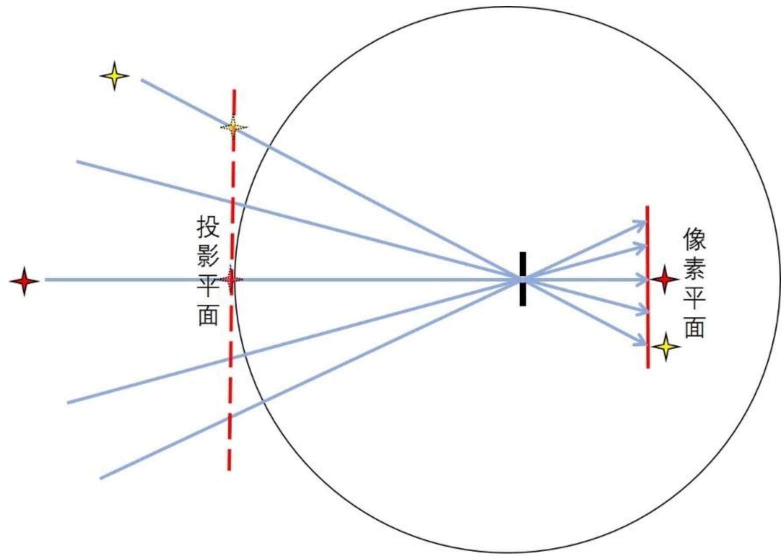

图 2 CCD 投影成像的示意图

天文上常规的 WCS 转换分为以下四步，如下图所示，“WCS 模型”的输入是探测器焦面

某点的像素坐标(x,y)，输出为该点所对应的天球赤道坐标(α，δ)。对于不考虑像场畸变的情况，模型的公式中包括 8 个参数(CRPIX1, CRPIX2, CRVAL1, CRVAL2, CD1_1, CD1_2, CD2_1, CD2_2)，对每一个星点，从像素坐标到天球坐标中间经过了四次坐标的变换，每一步变换会涉及到若干参数。具体的细节见 Greisen & Calabretta(2002)。当参数确定时，便可以唯一的确定坐标之间的转换关系。通常确定参数的方法是用相机视场内已知像素坐标和天球坐标的星点，拟合出最优参数来。

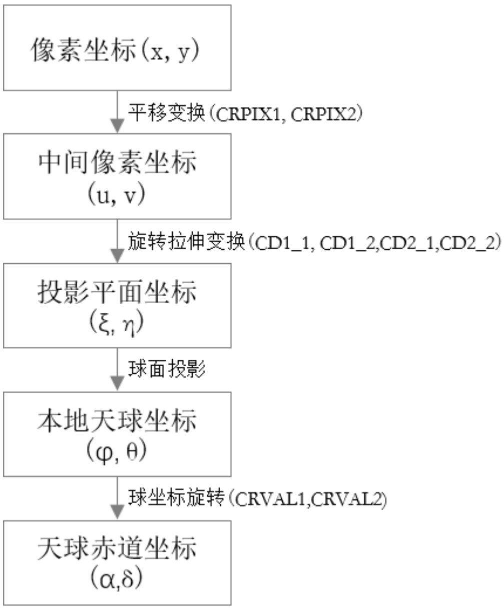

图 3 WCS 转换算法

（1）<像素坐标> → <中间像素坐标>

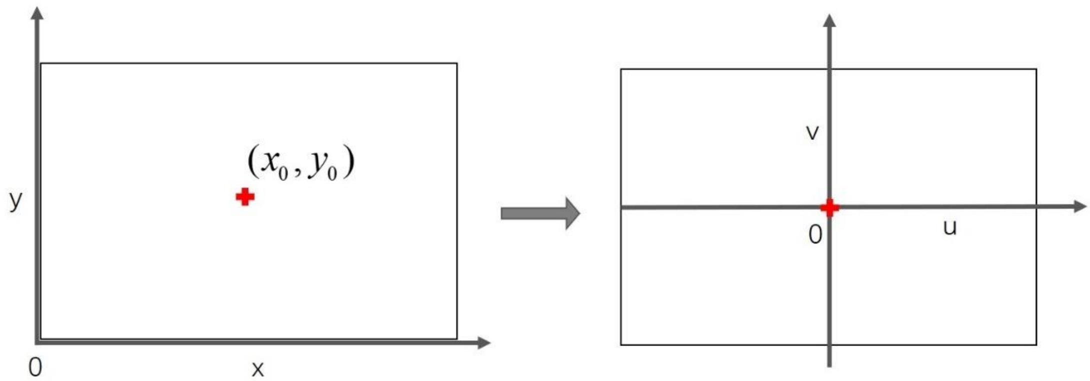

图 4 像素坐标到中间像素坐标的转换

这一步很简单，CCD 的<像素坐标>系一般是以左下角为原点的，我们将原点重新设为 CCD 的中心点，则原<像素坐标>中的(x ， y)坐标在新(u ， v)<中间像素坐标>系下的表示为:

$$u = x - x_0$$
$$v = y - y_0$$

其中，x0，y0 就是中心点的坐标，也就是 FITS Header 里的 CRPIX1 和 CRPIX2 参数。

(2)〈中间像素坐标〉 → 〈投影平面坐标〉

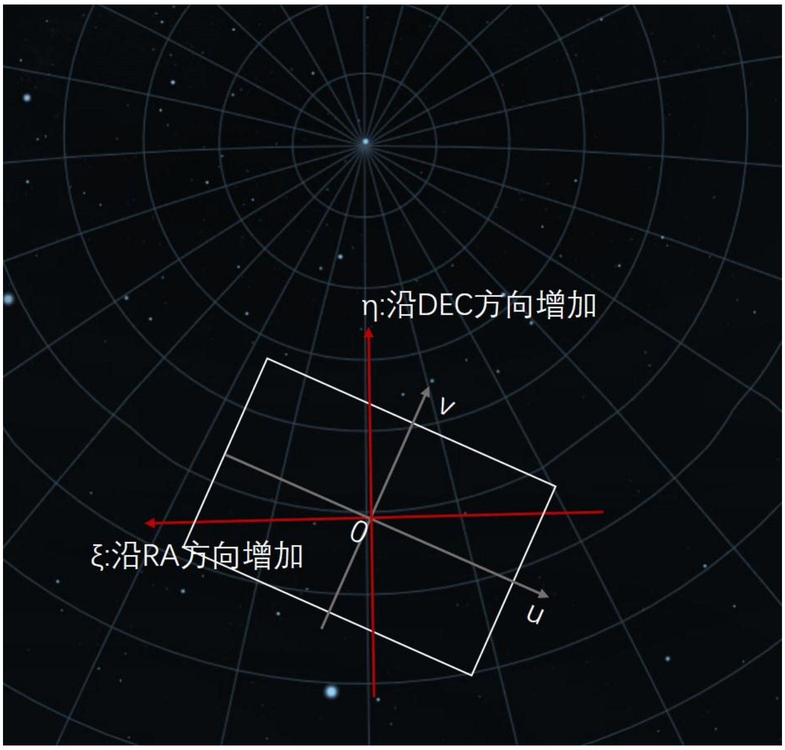

图 5 中间像素坐标到投影平面坐标的转换

这就是之前提到的投影一步，将<中间像素坐标>(u , v)投影到中心点与天球相切的直角坐标中(ξ, η)，一般习惯上我们会将这个<投影平面坐标>的, η轴指向北天极，沿着赤纬方向增加， ξ轴垂直于η轴，沿着赤经方向增加，且(ξ, η)的单位变为了弧度，注意ξ轴的指向与u是反向的,显然这是一个坐标旋转加翻折变换的问题，因此这一步其实是乘以一个矩阵。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{CD1\_1} & \mathrm{CD1\_2} \\ \mathrm{CD2\_1} & \mathrm{CD2\_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

通常可以在FITS文件的header中看到这四个CD参数，它包含了旋转和拉伸变换，对于更复杂的情况，如CCD焦平面相对光轴为倾斜的，该矩阵还能代表更复杂的线性变换。

对于有几何畸变的情况，一般会在<中间像素坐标>上中加上多项式，称之为 SIP 多项式:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{CD1\_1} & \mathrm{CD1\_2} \\ \mathrm{CD2\_1} & \mathrm{CD2\_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+f(u,v) \\ v+g(u,v) \end{pmatrix}$$

其中:

$$f(u,v) = \sum A_{\_p\_q} u^p v^q,\quad p+q \le A\_ORDER$$

$$g(u,v) = B_{-p-q}u^p v^q, \quad p+q \le B\_ORDER$$

比如对于 3 阶多项式：

$$f(u,v) = \mathtt{A\_2\_0}u^2 + \mathtt{A\_0\_2}v^2 + \mathtt{A\_1\_1}uv + \mathtt{A\_2\_1}u^2v + \mathtt{A\_1\_2}uv^2 + \mathtt{A\_3\_0}u^3 + \mathtt{A\_0\_3}v^3$$

其中，A_2_0、A_1_1 等相当于模型中多出了一些参数，于是在定标时，我们需要更多的星点去解算出这些参数。通常几何畸变参数的定标是事先独立于 WCS 定标的额外工作，也是基于对球状星团的观测来解算出视场的几何畸变参数。在具体观测时，可将像素坐标转换先到没有几何畸变的平面坐标上，再进行常规的 WCS 转换。

(3)〈投影平面坐标〉 → 〈本地天球坐标〉

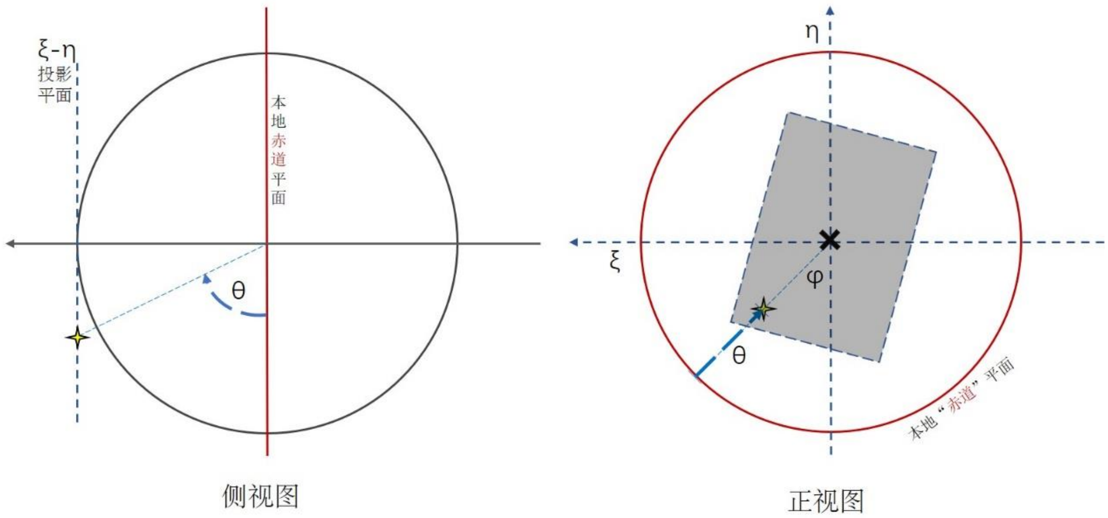

图 6 投影平面坐标到本地天球坐标的转换

这一步是从“平面”坐标到”球面”坐标的一个纽带，如上图的侧视图所示，蓝色虚线为投影平面，与天球相切，我们将这个投影平面的中心点设为一个〈本地天球坐标〉极点方向，那么我们也可以设一个与之平行的赤道面(所示为红色)，假设平面上有一个黄色星点的成像，那么它在球面坐标上的纬度就是 θ 。

如右上图所示，是我们面向投影平面指向时的正视图(左图从右向左看)，这时的赤道面是右图的红色圈，灰色的矩形是任意绘制的 CCD 成像平面，相对投影平面有一些偏转，我们从 η 轴的负方向为起点，顺时针旋转，则可以获得黄色星点的经度 φ 。

由此一来，我们便把平面坐标转换到了球面坐标上去，如下式所示，感兴趣的读者可以推导一下，由于这个坐标是依赖望远镜指向方向而建的，因此叫做〈本地天球坐标〉(native spherical coordinates)。

$$
\begin{cases}
\phi = \arctan(-\eta, \xi) \\
\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{180^\circ}{\pi R_\theta}\right)
\end{cases}
$$

其中的 $R_\theta = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ 表示星点距离投影平面坐标中心的距离。右侧的输入是<投影平面坐标>的两个分量,左侧是的输出是该点在本地天球坐标的两个分量。

(4)〈本地天球坐标〉 → 〈天球赤道坐标〉

最后一步便是将本地天球坐标换算到天球赤道坐标系中，其为两个球坐标之间的转换，公式如下，即球面上的某点，在不同的球坐标表示下的分量不同，则转换关系满足:

赤经

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_p + \arg(\sin\boxed{\theta}\cos\delta_p - \cos\boxed{\theta}\sin\delta_p\cos(\boxed{\phi} - \phi_p), \\
&\quad -\cos\boxed{\theta}\sin(\boxed{\phi} - \phi_p)),
\end{aligned}
$$

赤纬

$$
\delta = \sin^{-1}(\sin\boxed{\theta}\sin\delta_p + \cos\boxed{\theta}\cos\delta_p\cos(\boxed{\phi} - \phi_p)),
$$

该公式稍显复杂，其中左侧的输出就是 RA 和 DEC，而右侧繁杂的字母中，红框圈出的的是输入值，也就是上一步的<本地天球坐标>的(φ, θ)，而剩下的字母是模型的参数，其中(α_p, δ_p)是指<本地天球坐标>顶点在<天球赤道坐标>下的赤经和赤纬，其实就是 WCS 参数中的 CRVAL1,CRVAL2,而ϕ_p是指赤道天球的极点在<本地天球坐标系>中的经度,由于我们的本地天球坐标之前已经旋转到了与赤经赤纬平行的方向上，因而如果在北天观测时，这个值可以直接取 180°，如果遇到特殊情况该值可设为自由参数，其在 WCS 中的定义名称为 LONPOLEa。

上述的球面坐标变换公式其实可以应用到任何两个球面变换中,如赤道坐标系到银道坐标系，只不过是参数变了而已，公式的形式不变。

该转换公式是基于 3 维空间直角坐标系的旋转矩阵 R(θ)推导出来的，首先将球坐标转换成空间直角坐标系 $[x, y, z]^T$，然后依次左乘以三个三维旋转矩阵 $R_Z(\alpha_p + 90°)R_X(90°\text{-}\delta_p)R_Z(\phi_p + 90°)$ 就可以将该直角坐标换算到另一个坐标系下的表示其中的三个符号上一段提到过，最后再换算回球坐标,也得到了本段最初的公式

旋转矩阵的具体形式为:

绕 X 轴右手系旋转θ:

$$
R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

绕 Y 轴右手系旋转θ:

$$
R_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{-}\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

绕 Z 轴右手系旋转θ:

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

参考:

FITS WCS: https://fits.gsfc.nasa.gov/fits_wcs.html

[1] Greisen E W, Calabretta M R. Representations of world coordinates in FITS[J]. Astronomy & Astrophysics, 2002, 395(3): 1061-1075.
[2] Greisen E W, Calabretta M R. Representations of world coordinates in FITS[J]. Astronomy & Astrophysics, 2002, 395(3): 1061-1075.
[3] Calabretta M R, Valdes F, Greisen E W, et al. Representations of distortions in FITS world coordinate systems[C]//Astronomical Data Analysis Software and Systems (ADASS) XIII. 2004, 314: 551.