宇宙学101

沈世银

详细文献：https://campuspress.yale.edu/astro610/

Why宇宙学

- 如何计算红移z处的
  - 宇宙年龄
  - 距离（星等，尺度）
  - 如何量级估算？
- Python软件包
  - astropy.cosmology
  - http://docs.astropy.org/en/stable/cosmology/

Friedmann 方程

Cosmological Principle → $$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\right]$$

General Relativity → $$G_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

r, θ,ϕ: 共动坐标
t：静止在共动坐标中的时钟
a：尺度因子
K = (+1,0,-1)：曲率，正，平直，负曲率
二维: 球面，平面，'马鞍'面

2D Euclidean	$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2\right]$
2D Sphere	$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2\right]$
2D Saddle	$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1+r^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2\right]$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

- a: 尺度因子，时间的函数
- ρ：能量密度，时间的函数
  - 如果ρ=0?
- K: 空间曲率，常数
- Λ: 宇宙学常数　　（真空能）　$\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$
  - 静态宇宙 (Λ<0)
  - 加速膨胀 (Λ>0)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{\mathrm{m},0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{\Lambda,0}\right] - \frac{Kc^2}{a^2}$$

哈勃常数

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{\mathrm{m},0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \rho_{\mathrm{r},0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{\Lambda,0}\right] - \frac{Kc^2}{a^2}$$

- 宇宙临界密度 $\rho(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \equiv \rho_{\mathrm{crit}}(t)$
  - K=0
  - 时间的函数，物理意义？
- 宇宙学红移： a=1/(1+z)
  - $\lambda(z)=\lambda_0/(1+z)$
  - 多普勒红移z ~v/c $\lambda(v)= \lambda_0(1+v/c)$ （非相对论情况下）

$$H^2(z) = H_0^2\, E^2(z)$$

where

$$\Omega_{\mathrm{x}}(t) \equiv \frac{\rho_{\mathrm{x}}(t)}{\rho_{\mathrm{crit}}(t)}$$

$$E(z) = \left[\Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)\,(1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{m},0}(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{r},0}(1+z)^4\right]^{1/2}$$

今天： Ω_r~0

$$E(z) = \left[\Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)(1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{m},0}(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{r},0}(1+z)^4\right]^{1/2}$$

宇宙学参数的演化

$$\Omega_{\mathrm{x}}(t) = \frac{\rho_{\mathrm{x}}(t)}{\rho_{\mathrm{crit}}(t)} = \frac{\rho_{\mathrm{x}}(t)}{\rho_{\mathrm{x},0}}\frac{\rho_{\mathrm{x},0}}{\rho_{\mathrm{crit},0}}\frac{\rho_{\mathrm{crit},0}}{\rho_{\mathrm{crit}}(t)} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\gamma_{\mathrm{x}}}\Omega_{\mathrm{x},0}\frac{H_0^2}{H^2(t)}$$

$$\Omega_{\mathrm{x}}(z) = \frac{\Omega_{\mathrm{x},0}(1+z)^{\gamma_{\mathrm{x}}}}{E^2(z)}$$

where

$$\gamma_{\mathrm{m}} = 3 \qquad \gamma_{\Lambda} = 0$$

$$\gamma_{\mathrm{r}} = 4 \qquad \gamma_{\mathrm{K}} = 2$$

$$\Omega_{\mathrm{K}}(z) \equiv 1 - \Omega(z)$$

$$\Omega(z) - 1 = (\Omega_0 - 1)\frac{(1+z)^2}{E^2(z)}$$

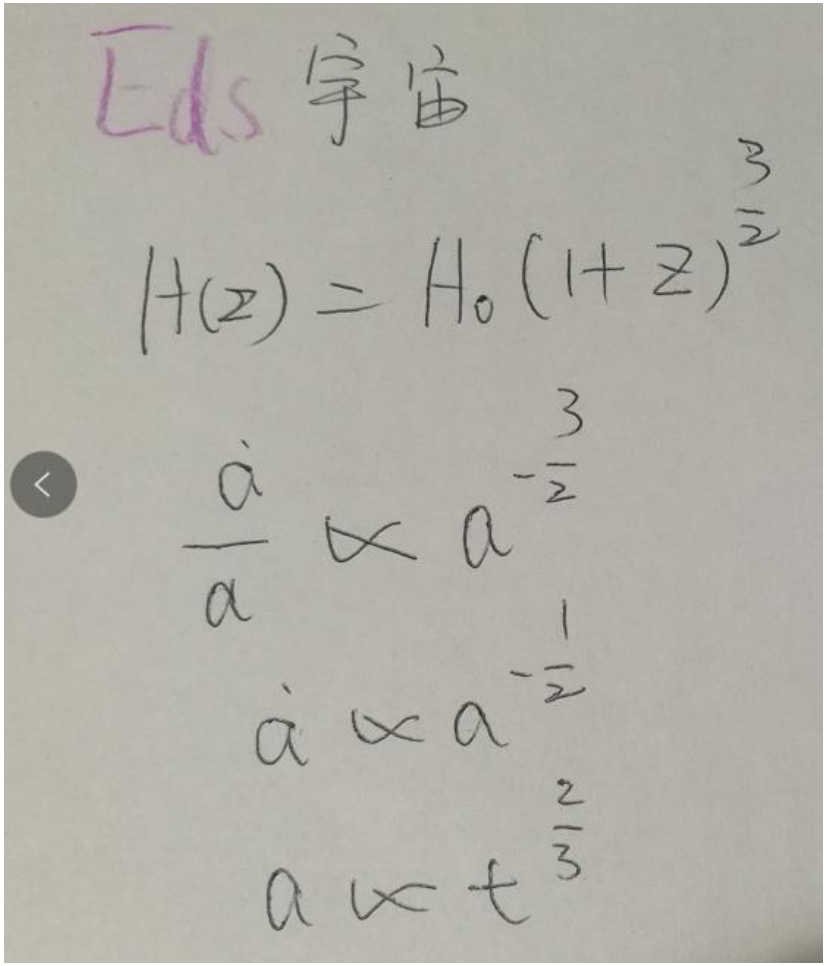
所有能量密度（物质、辐射）不为0的宇宙在z→ infinity 有Ω~1

$$H^2(z) = H_0^2\, E^2(z)$$

where

$$E(z) = \left[\Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)\,(1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{m},0}(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{r},0}(1+z)^4\right]^{1/2}$$

- Ω_m~1, Ω_Λ~0
  - 减速膨胀的宇宙



红移z处的宇宙的年龄

$$t(z) = \int_0^{a(z)} \frac{1}{\dot{a}}\, da = \int_\infty^z \frac{1}{\dot{a}} \frac{1}{(1+z)^2}\, dz = \int_\infty^z \frac{a}{\dot{a}} \frac{1}{(1+z)}\, dz$$

$$a = \frac{1}{1+z} \qquad H(z) = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$= \int_z^\infty \frac{1}{H(z)} \frac{1}{(1+z)}\, dz$$

红移z处星系的距离

- 固有距离，红移z=0处的共动距离

红移 z 的光子到达红移 0 的时间

$$t = \int_0^z \frac{1}{H(z)} \frac{1}{1+z} dz$$

红移 z 到红移 0 的固有距离

$$l = \int_0^{t(z)} \frac{c}{a} dt = \int_0^z \frac{c}{H(z)} dz$$

光度距离，角度距离

- $d_L=d*(1+z)$ 光子的红移效应 $f=L/(4\pi d_L^2)$
- $d_A=d/(1+z)$ 宇宙的膨胀效应 $\theta=R/d_A$
- 表面亮度的cosmic dimming：$10*\log(1+z)$

星系的本动速度

The observed redshift from an object is $\boxed{1 + z_{\rm obs} = (1 + z_{\rm cos})(1 + z_{\rm pec})}$

$1 + z_{\rm cos} = 1/a(t_{\rm em})$ is cosmological redshift due to expansion of space-time

$1 + z_{\rm pec} = \sqrt{\dfrac{1 + v_{\rm pec}/c}{1 - v_{\rm pec}/c}}$ is Doppler redshift due to peculiar velocity (along los)

In non-relativistic limit ($v_{\rm pec} \ll c$), this reduces to: $\boxed{z_{\rm obs} = z_{\rm cos} + \dfrac{v_{\rm pec}}{c}(1 + z_{\rm cos})}$

膨胀宇宙满足能量守恒吗？

提供一个经典热力学框架下的说法，很多宇宙学教科书上有。

假设宇宙是满足热力学第一定理的，宇宙的膨胀是个绝热过程，那么我们看看会得到什么？

dU+PdV=0

U是我们说的能量， $U=\rho c^2 V$ ，ρ 是能量密度，PdV是做的功。

如其他同学说的，如果宇宙中没有辐射，没有暗能量，P=0，显然能量是守恒的。

如果有辐射和宇宙学常数（真空能），会怎样呢？

做一些简单的推导可以得到

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$$

其中，a是宇宙的尺度因子，简单的理解就是宇宙的尺度大小，膨胀宇宙中，a是时间的函数。

ω 是状态方程中的因子，有 $P=\omega\rho c^2$ 。

- 对于非相对论性粒子， $\omega \approx 0$ ，$\rho \propto a^{-3}$,能量守恒，能量密度随着宇宙膨胀3次方下降。
- 对于相对论性粒子（辐射）， $\omega \approx 1/3$ ，$\rho \propto a^{-4}$,能量密度随着宇宙膨胀4次方下降。看，红移效应进来了！**也就是说光子红移的能量损失是因为宇宙做了PdV的功。**
- 对于真空能， ρ 是常数，$\omega=-1$，$P=-\rho c^2$ 。看，P是负数，所谓负压力！**宇宙的能量随着膨胀增加是因为负压力对宇宙做了功！**